Introducción a las geometrías no euclidianas

Miguel Ángel Ruiz

Sesión elaborada e impartida junto a
Manuel Rubio Martínez

Objetivos:

- Desarrollar el razonamiento axiomático-deductivo a través de una materia conocida, la geometría (asimilar el concepto de axioma, definición, demostración).
- Generar inquietudes sobre el conocimiento matemático adquirido.
- Utilizar la geometría clásica como herramienta para introducir otras geometrías.
- Transmitir cultura general matemática.

Metodología:

- Recordamos la sesión Geometría con Regla y Compás. En particular, los Axiomas de geometría euclidiana (con énfasis en el de las Paralelas).
- Introducimos geometrías nuevas, indicando cómo se trazan los análogos de las rectas y comprobando qué axiomas se satisfacen y cuáles no. También comprobamos otras características de cada una (triángulos, rectas perpendiculares).
- Primero, la geometría esférica. Motivamos el empleo de los círculos máximos como sustitutos de las rectas en el plano euclidiano.
- Después, presentamos el modelo del semiplano de Poincaré (plano hiperbólico). Construimos circunferencias hiperbólicas, familias ultraparalelas e hiperciclos.
- Finalmente, se dan curiosidades sobre geometrías no euclidianas.

Estalmat
Im

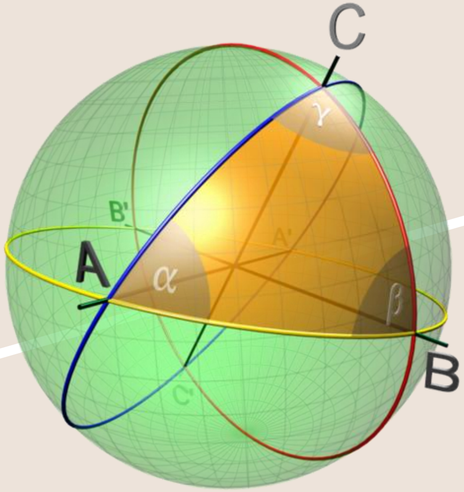
Axiomas de Euclides

1. Dados dos puntos, se puede trazar una recta que pasa por ellos.
2. Dado un segmento, este se puede extender indefinidamente.
3. Dado dos puntos, existe una circunferencia con centro en el primero que pasa por el segundo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Por un punto exterior a una recta solo pasa una única paralela a la recta dada.

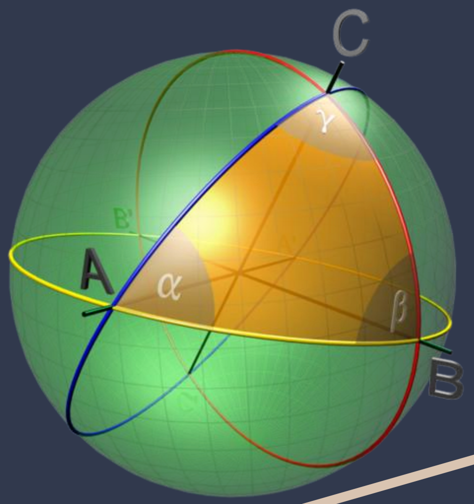
Aproximación histórica

- Desde la existencia de *Los Elementos* de Euclides, diversos matemáticos han intentado demostrar el Axioma de las Paralelas como proposición a partir de los demás.
- En el primer tercio del siglo XIX, el trabajo de K. F. Gauss, J. Bolyai y N. I. Lobachevsky proporciona modelos de geometría plana donde este axioma no se cumple, la geometría elíptica y la geometría hiperbólica.
- E. Beltrami demuestra que las geometrías anteriores tienen axiomas consistentes, proporcionando algunos modelos.
- F. Klein y H. Poincaré culminan el desarrollo de estas nuevas geometrías en el último tercio del siglo XIX.

Geometría esférica

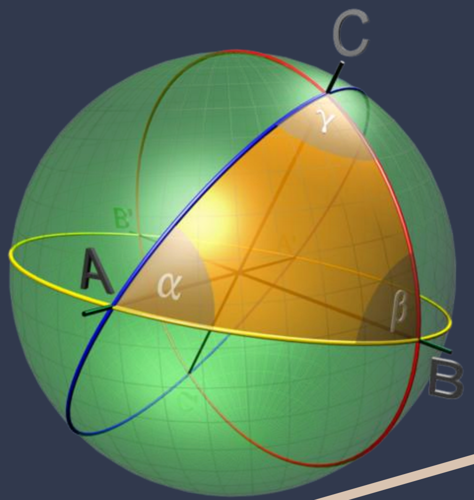


Geometría esférica



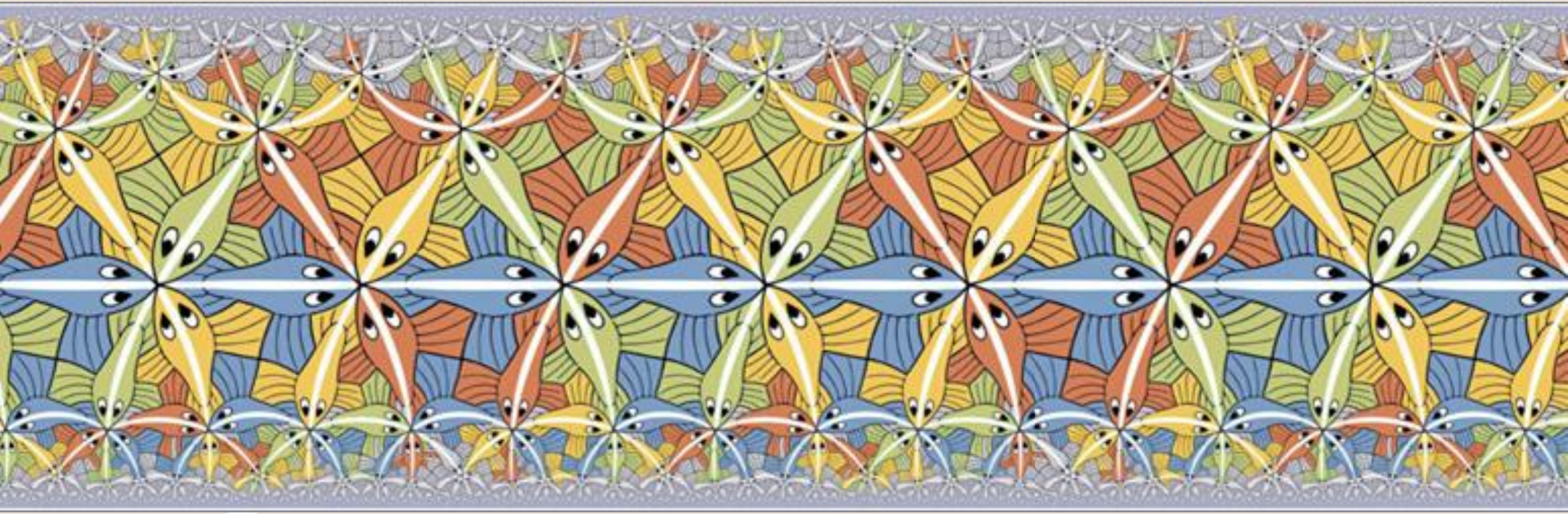
- Entregamos bolas de porexpán a los alumnos para que ellos mismos experimenten con esta nueva geometría.
- Preguntamos:
  1. ¿Cuál es la distancia más corta entre dos puntos?
  2. ¿Qué línea se describe si sigues una trayectoria recta?
- Con estas preguntas, los alumnos llegan a la conclusión de que los círculos máximos son el análogo de las rectas en el plano.
- Explicamos cómo trazar una circunferencia y comparamos con los Axiomas de Euclides.
- En particular, no se satisface el Axioma de las Paralelas.

Geometría esférica



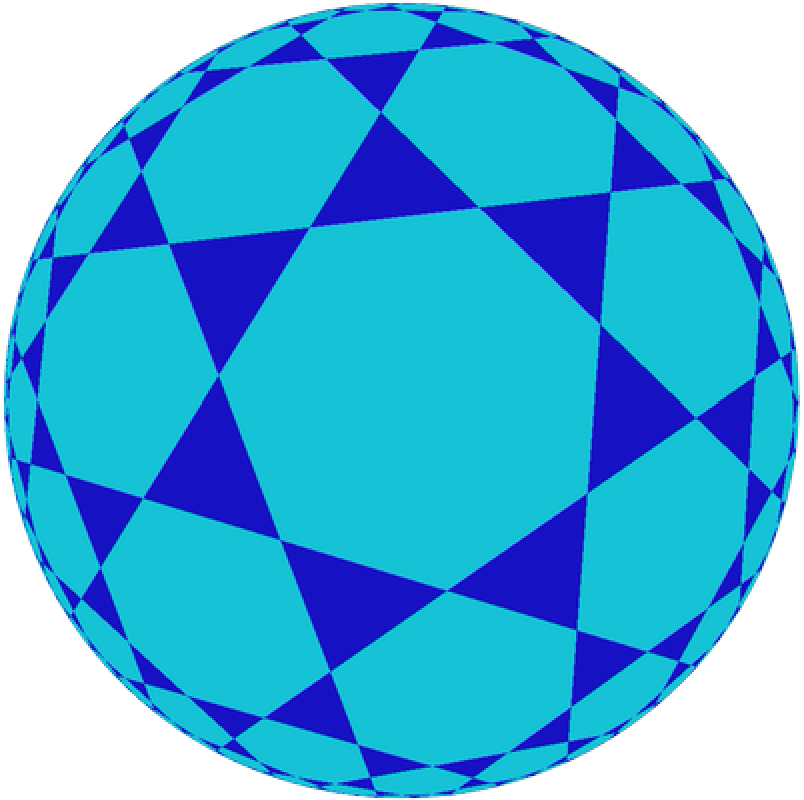
- Preguntamos acerca de las perpendiculares: ¿cuántas perpendiculares a una recta dada pasan por un punto?
- Y también sobre triángulos: ¿cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero? ¿Hay algún triángulo cuyos ángulos sumen 180º?

Geometría hiperbólica



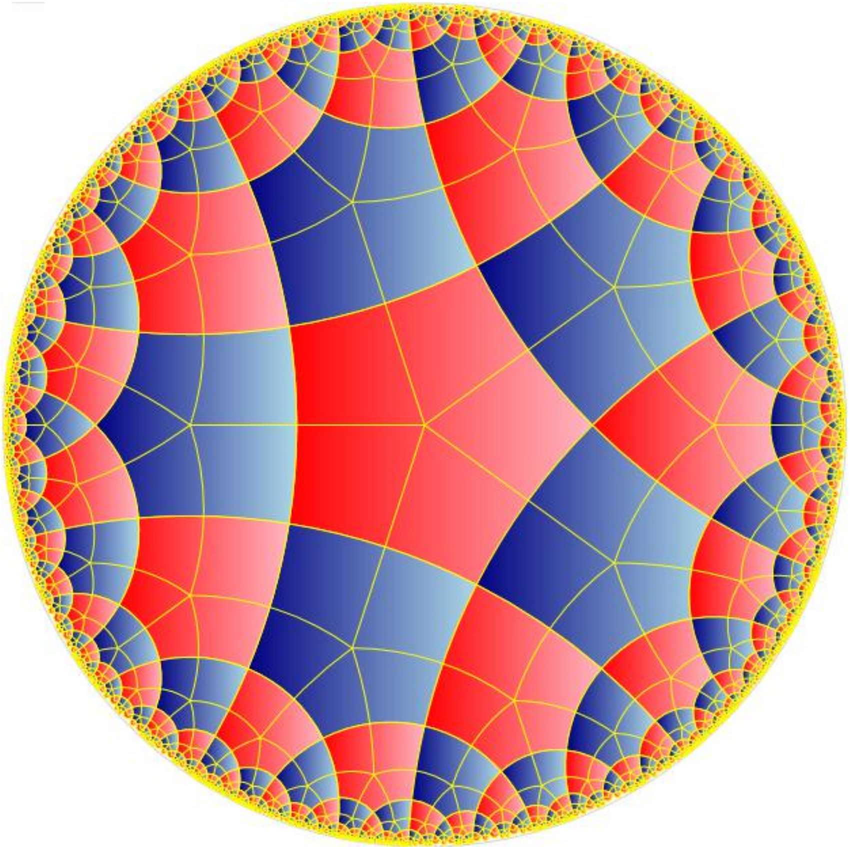
Disco de Beltrami-Klein

Las rectas son cuerdas en el disco unidad



Disco de Poincaré

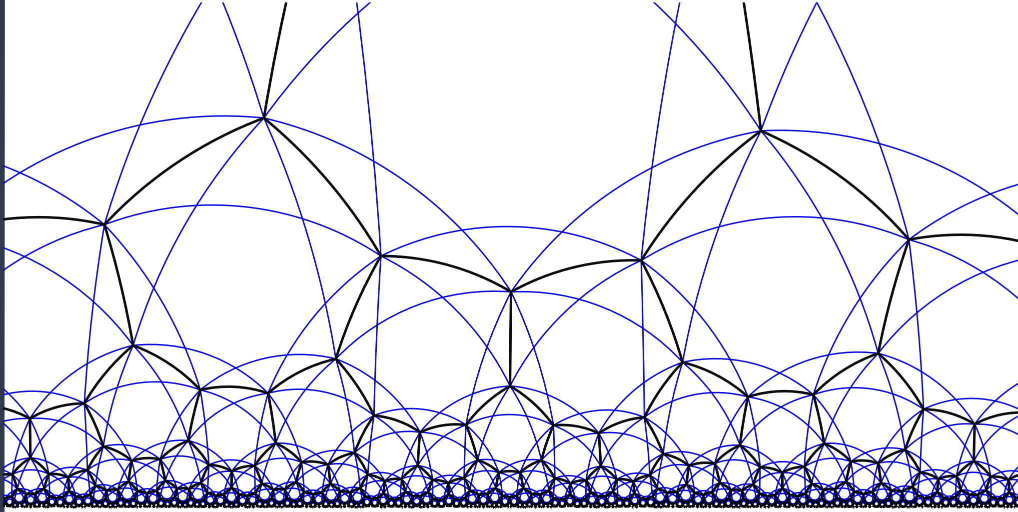
Las rectas son arcos de circunferencia en el disco unidad



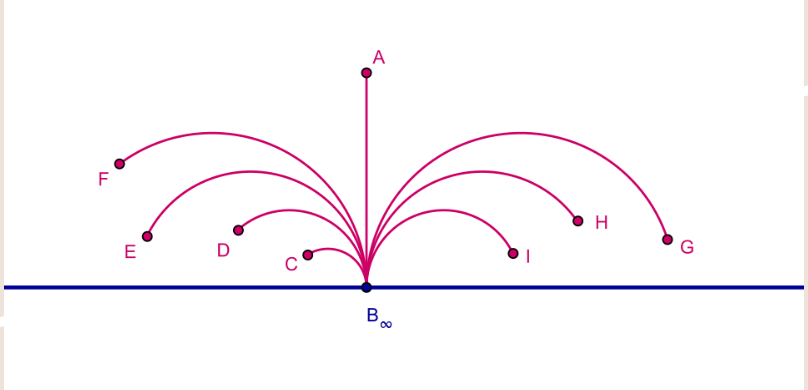
Semiplano de Poincaré

Las rectas son:

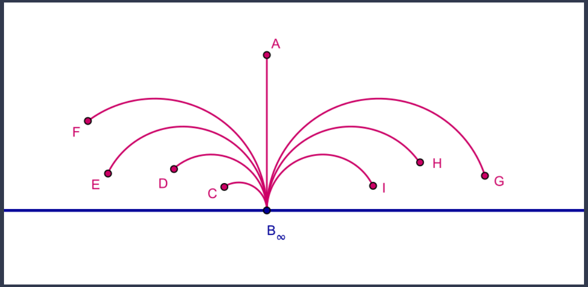
1. semicircunferencias con centro en el eje OX
2. rectas verticales



Geometría hiperbólica: modelo del semiplano de Poincaré



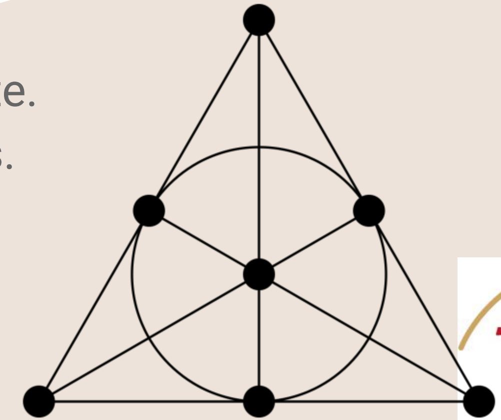
Semiplano de Poincaré



- Explicamos la construcción de rectas en el semiplano de Poincaré.
- Comprobamos que entre dos puntos cualesquiera solo hay una recta.
- Indicamos cómo trazar circunferencias en el semiplano de Poincaré.
- Preguntamos cómo hallar familias ultraparalelas.
- Mostramos cómo calcular ángulos.
- Planteamos cuestiones sobre rectas perpendiculares.
- Medimos los ángulos de varios triángulos.
- Trazamos hiperciclos.

Epílogo: más geometría(s)

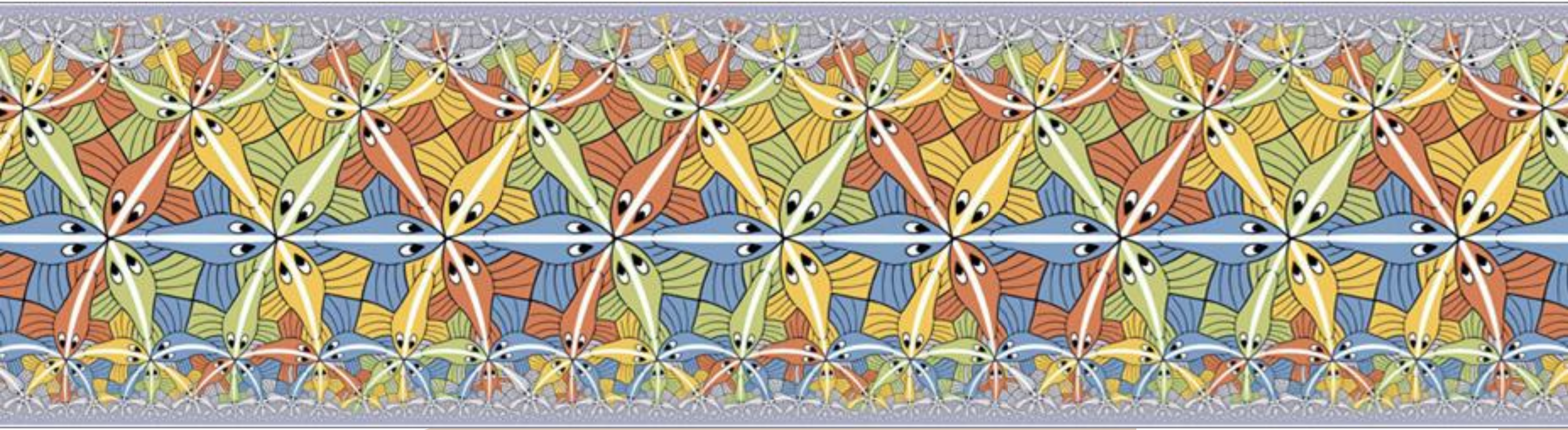
- Si reducimos nuestros axiomas, podemos encontrar otras geometrías, como son las geometrías proyectivas.
- En estas geometrías no existe el concepto de distancia.
- Se comenta el ejemplo del plano de Fano y se comprueba que satisface las propiedades:
  1. Por cada punto pasan 3 rectas exactamente.
  2. Cada recta pasa por exactamente 3 puntos.



Conclusiones esperadas:

- El alumnado aprende sobre nuevas geometrías.
- Se entiende el papel que cumplen los axiomas en una teoría.
- La geometría euclidiana, al servir auxiliarmente en el estudio de la geometría hiperbólica, se entiende como una herramienta útil fuera del plano euclidiano.
- Afianzamos el conocimiento sobre la geometría plana.

¡Gracias por vuestra atención!



ESTALMAT
ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

XVIII SEMINARIO NACIONAL
ESTALMAT
MURCIA

Estalmat
clm

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES

FECYT
INNOVACIÓN